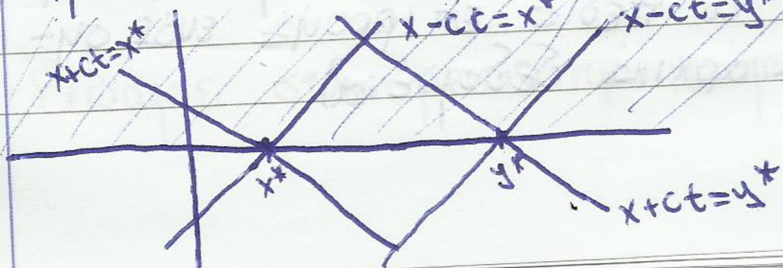
2-12-15

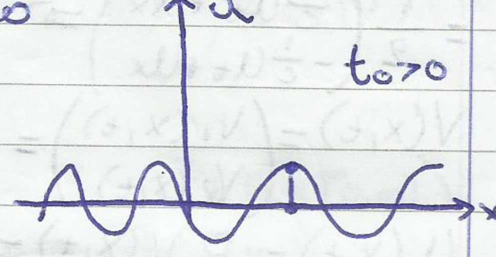
Παρατηρήσεις

1) $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

2) Διάδοση ιδιομορφιών: $\varphi \in C^2(\mathbb{R}\setminus\{x^*\}), \varphi \in C^1(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \varphi' \in C(\mathbb{R})$ και φ' κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη και στο x^* να $\exists\, \varphi''(x^*-) \neq \varphi''(x^*+)$ και αντίστοιχα $\psi \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{y^*\}), \psi \in C(\mathbb{R})$, ψ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη και $\exists\, \psi'(y^*-) \neq \psi'(y^*+)$
$\Rightarrow$ οι ιδιομορφίες αυτές μεταφέρονται μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών που περνάνε από τα σημεία x^*, y^* $\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}\setminus(\{x\pm ct=y^*\}\cup\{x\pm ct=x^*\}))$



③ Η (ε) ικανοποιεί το (ΠΑΤ) και για αρνητικές τιμές του t $\Leftrightarrow$ αν γνωρίζουμε την κατάσταση $u(\cdot,t_0)$, $u_t(\cdot,t_0)$, τότε γνωρίζουμε και το $u(\cdot,0)$, $u_t(\cdot,0)$

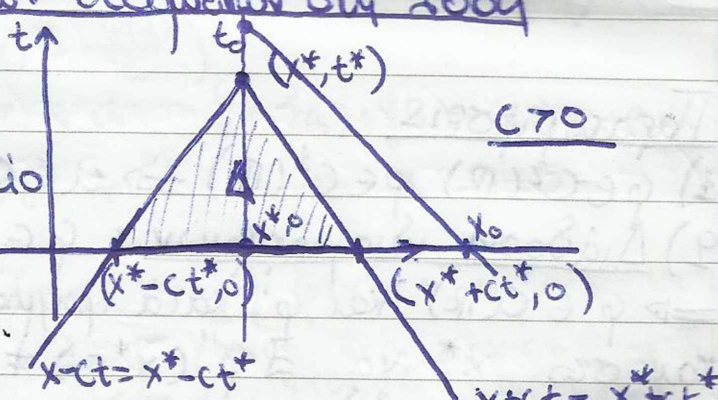


④ Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα (ευστάθεια)

$$(\varepsilon) \Rightarrow |u(x,t)| \le \underbrace{\sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi(y)|}_{=\|\varphi\|_\infty} + t\,\underbrace{\sup_{y\in\mathbb{R}}|\psi(y)|}_{=\|\psi\|_\infty}$$

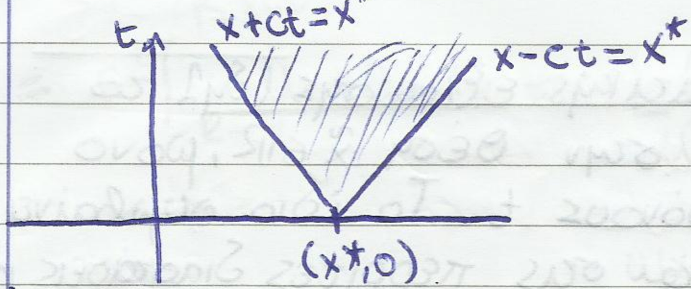
$\Rightarrow$ αν $u, \tilde{u}$ λύσεις του (ΠΑΤ) για αρχικά δεδομένα φ,ψ και $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}$ αντίστοιχα $\Rightarrow |u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| \le \|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\infty + t\|\psi-\tilde{\psi}\|_\infty$

Εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα και Επιρροή των αρχικών δεδομένων στη λύση



Εξάρτηση:
Το Δ είναι το χαρακτηριστικό τρίγωνο για το σημείο (x^*,t^*) ή περιοχή εξάρτησης της $u(x^*,t^*)$, δηλαδή το $u(x^*,t^*)$ εξαρτάται μόνο από τα $\varphi(x^*\pm ct^*)$ και τα $\psi(\tau)$, $\tau\in[x^*-ct^*, x^*+ct^*]$
$\Rightarrow$ οι μεταβολές στα αρχικά δεδομένα της φ μεταδίδονται με ταχύτητα c (πεπερασμένη!) και οι μεταβολές στα αρχικά δεδομένα της ψ με ταχύτητες $\le c$

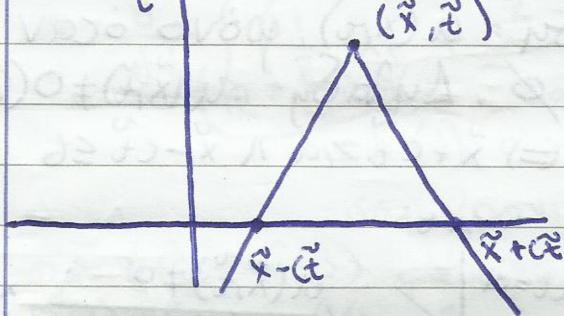
Επίσης: Αντίστοιχα το πεδίο επιρροής ενός σημείου $(x^*,0)$ (στα αρχικά δεδομένα)



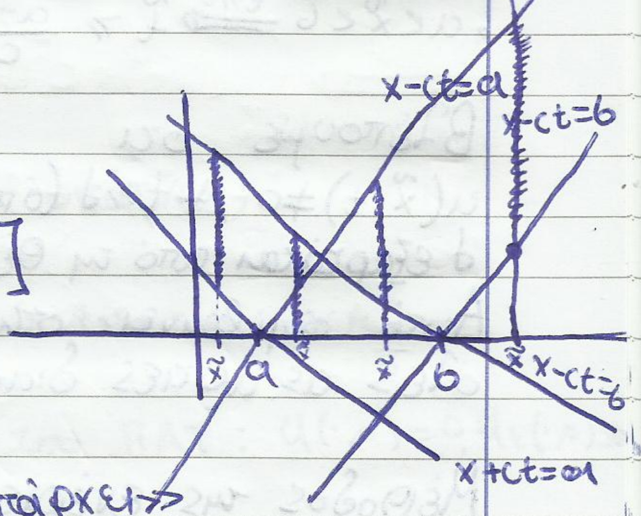
Έστω, $\operatorname{Supp}\varphi, \operatorname{Supp}\psi \subset [a,b]$, δηλ. $\varphi=\psi=0$ στο $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ και έστω $\tilde{x}\in\mathbb{R}$.

<u>1η περίπτωση</u>: $\psi\equiv 0 \Rightarrow (2): u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right)$

$\Rightarrow u(\tilde{x},\tilde{t})\neq 0$ ανν $\tilde{x}-c\tilde{t}\in[a,b]$ $\vee$ $\tilde{x}+c\tilde{t}\in[a,b]$, δηλαδή ανν $\tilde{t}\in\left[\frac{\tilde{x}-b}{c},\frac{\tilde{x}-a}{c}\right]$ $\vee$ $\tilde{t}\in\left[\frac{a-\tilde{x}}{c},\frac{b-\tilde{x}}{c}\right]$



- $\tilde{x}\geq b \xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\in\left[\frac{\tilde{x}-b}{c},\frac{\tilde{x}-a}{c}\right]$
- $\tilde{x}\leq a \xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\in\left[\frac{a-\tilde{x}}{c},\frac{b-\tilde{x}}{c}\right]$
- $a<\tilde{x}\leq b \xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\in\left[0,\max\left\{\frac{b-\tilde{x}}{c},\frac{\tilde{x}-a}{c}\right\}\right]$



<u>Συνέπεια</u>: Η κυματική εξίσωση «υπάρχει» και γενικότερα στο $\mathbb{R}^n$ όπου έχει το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt}(x_1,\dots,x_n,t)=c^2\Delta u(x_1,\dots,x_n,t)=c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x_1,\dots,x_n,t) & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u(\cdot,0)=\varphi \\ u_t(\cdot,0)=\psi. \quad \varphi\in C^2(\mathbb{R}^n),\ \psi\in C^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

και για $n=2,3$ υπάρχουν επίσης αναπαραστάσεις των λύσεων

- Είδαμε στα αμέσως προηγούμενα ότι αν $\operatorname{Supp}\varphi\subset[a,b]$, $\psi\equiv 0$

τότε η λύση της κυματικής εξίσωσης (δηλ. το κύμα $u(x,t)$) είναι $\neq 0$ στην θέση $\tilde{x}\in\mathbb{R}$, μόνο για πεπερασμένους χρόνους t. Το ίδιο συμβαίνει (ακόμα και όταν $\psi\neq 0$) και στις περριττές διαστάσεις n.

<u>2η περίπτωση:</u> $\psi\not\equiv 0$ (αλλά $\operatorname{Supp}\psi \subset [a,b]$)

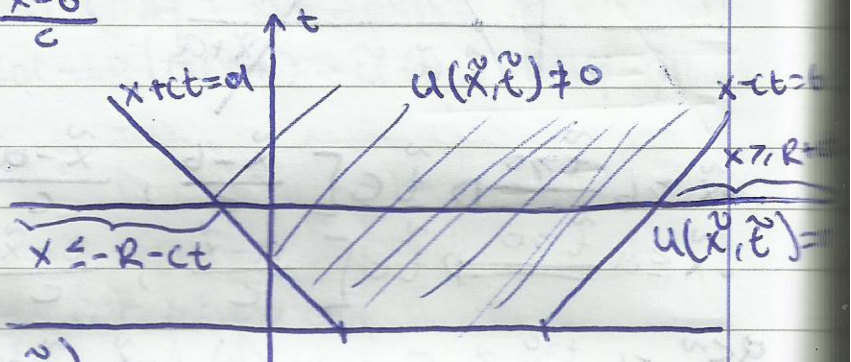
$$(2)\quad u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)\,d\tau$$

Το ψ θα επηρεάσει τη λύση $u(x,t)$, μόνο όταν το $[x-ct,x+ct]\cap[a,b]\neq\emptyset$. Δηλαδή $u(\tilde{x},\tilde{t})\neq 0$ ($\varphi\equiv 0$) ανν $[\tilde{x}-c\tilde{t},\tilde{x}+c\tilde{t}]\cap[a,b]\neq\emptyset \Leftrightarrow \tilde{x}+c\tilde{t}\geq a \wedge \tilde{x}-c\tilde{t}\leq b$

δηλαδή, • $\tilde{x}\geq b$: $\xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\geq \frac{\tilde{x}-b}{c}$

• $\tilde{x}\leq a \xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\geq \frac{\tilde{x}-b}{c}$

• $a<\tilde{x}<b \xRightarrow{\tilde{t}\geq 0} \tilde{t}\geq \frac{a-\tilde{x}}{c}$



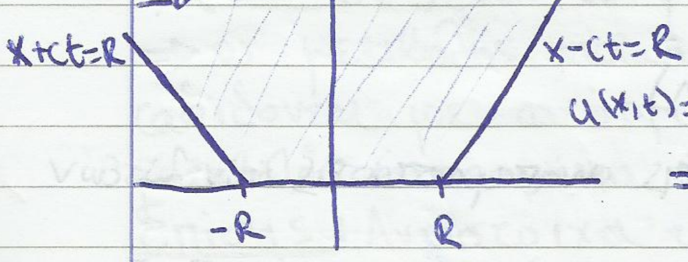
Βλέπουμε ότι $u(\tilde{x},t)\neq 0$, $\forall t\geq d$ (όπου d εξαρτάται από τη θέση $\tilde{x}$).

Αυτό συμβαίνει στη διάσταση $n=1$, αλλά και σε όλες τις άρτιες διαστάσεις (αλλά όχι στις περιττές ≥ 3)

<u>Μέθοδος της ενέργειας</u>

Έχουμε το (ΠΑΤ): $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $u(\cdot,0)=\varphi$, $u_t(\cdot,0)=\psi$, $\operatorname{Supp}\varphi, \operatorname{Supp}\psi\subset[-R,R]$, $\varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R})$, $u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

$\Rightarrow$



$$u_{tt}=c^2u_{xx}\Rightarrow$$
$$u_{tt}u_t=c^2u_{xx}u_t$$
$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}}u_{tt}u_t\,dx}_{=\frac{1}{2}(u_t^2)_t}=\int_{\mathbb{R}}c^2u_{xx}u_t\,dx=$$

$$= c^2 \int_{-R-ct}^{R+ct} u_{xx} u_t \, dx = c^2 \Big[\underbrace{\big(u_x(R+ct,t)\, u_t(R+ct,t) - u_x(-R-ct,t)\, u_t(-R-ct,t)\big)}_{=0 \text{ (αφού}} - \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u_x u_{tx}}_{=\frac{1}{2}(u_x^2)_t} dx$$

$u(x,t)=0$ πάνω και εκτός των χαρακτηριστικών)

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + c^2 \frac{1}{2} u_x^2 \right)_t dx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Big(\underbrace{\frac{1}{2} u_t^2}_{\text{κινητική}} + \underbrace{c^2 \frac{1}{2} u_x^2}_{\text{δυναμική}} \Big) dx}_{}$$

$= E(t)$ είναι η ενέργεια του κύματος $u(x,t)$ στη χρονική στιγμή t

$\Rightarrow E(t) = E(0)$, $\forall t \geq 0 \Rightarrow$ διατήρηση της ενέργειας

$$E(t) = E(0) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} c^2 (\varphi')^2 \right) dx$$

Αν $E(0)=0$, τότε $E(t)=0$

$\Rightarrow$ Η λύση είναι μοναδική (αν υπάρχει)

<u>Μοναδικότητα της λύσης:</u> u_1, u_2 λύσεις του ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(\cdot,0) = \varphi \\ u_t(\cdot,0) = \psi \end{cases} \Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{:=u} \text{ λύση του ΠΑΤ: } u(\cdot,0)=0,\ u_t(\cdot,0)=0$$

$\Rightarrow E(t) = E(0)$, $\forall t \geq 0 \Leftrightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$

~~Ασκ~~ [Ασκ: 2.17 - 2.22]